DE LA RECHERCHE À L'INDUSTRIE

cea

LES TP DU CEA



Corrigé

Mesure de la masse du trou noir au centre de la galaxie à partir d'observations du VLT de l'ESO

Table des matières

MESURE DE LA MASSE DU TROU NOIR AU CENTRE DE LA GALAXIE À PARTIR D'OBSERVATIONS DU VLT DE L'ESO (CORRIGÉ)

CORRIGÉ 3

- Activité 1 : 3
- Activité 2 : 5
- Activité 3 : 6
- Activité 4 : 10
- Activité 5 : 10
- Activité 6 : 10
- Activité 7 : 12
- Activité 8 : 13

Coproduit par : ESA/ESO - CEA / Direction de la Communication / Service Édition Événements
Auteurs : François Saint-Jalm, Professeur de Physique – Chimie à l'Éducation Nationale
Roland Lehoucq – Astrophysicien au CEA
Conception graphique : Lucille Colombel, CEA / Direction de la Communication
Image couverture : ESA/NASA. **Composition :** François Saint-Jalm (CEA)

MESURE DE LA MASSE DU TROU NOIR AU CENTRE DE NOTRE GALAXIE À PARTIR D'OBSERVATIONS DU VLT DE L'ESO

CORRIGÉ

■ Activité 1 (facultative) : Ellipses

On a évidemment : $y = \pm b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$.

On voit que pour calculer à la main les coordonnées d'un certain nombre de points il faut se donner des valeurs de x comprises entre – a et + a.

Pour les valeurs $a = 10$ cm et $b = 5$ cm, la courbe correspondant à cette formule est la suivante :

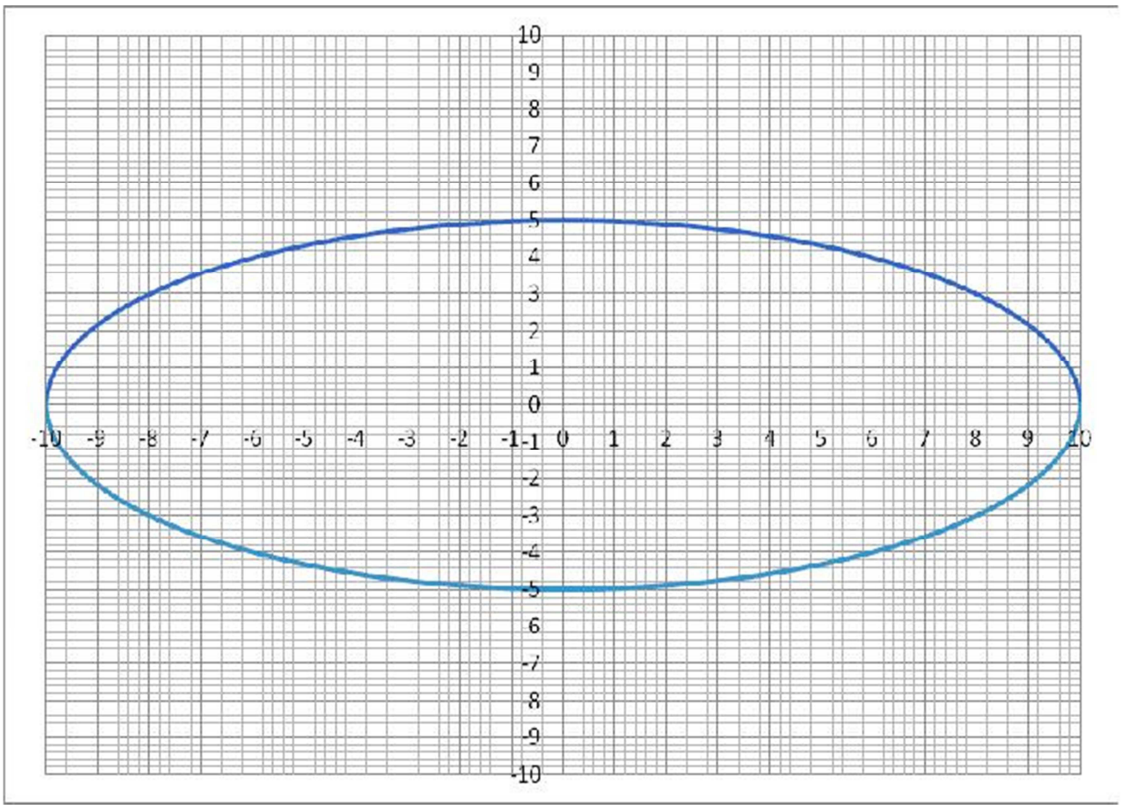


Figure 1 : *Première ellipse.*
Image : François Saint-Jalm (CEA).

Pour les valeurs $a = 10\ \text{cm}$ et $b = 2\ \text{cm}$, la courbe correspondant à cette formule devient :

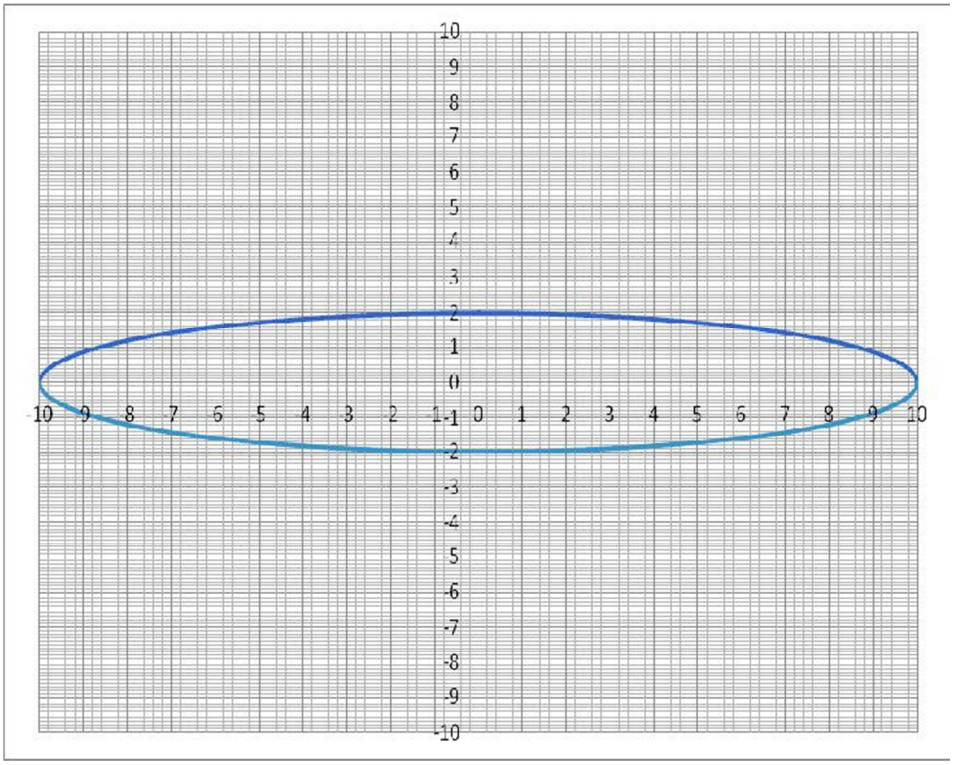


Figure 2 : *Deuxième ellipse.*
Image : François Saint-Jalm (CEA).

On comprend facilement que « a » correspond à la moitié de l'axe horizontal et « b » à la moitié de l'axe vertical. Comme on a $a > b$, « a » représente le demi-grand axe de l'ellipse et « b » son demi-petit axe.
Pour $a = b = 10\ \text{cm}$, on obtiendrait un cercle qui n'est qu'une forme particulière d'ellipse.

Tracée avec l'origine au foyer par la formule $r = \dfrac{p}{1 + e \cdot \cos\theta}$ et à l'aide du fichier « Ellipse 2.xls », la première de ces ellipses a l'allure suivante :

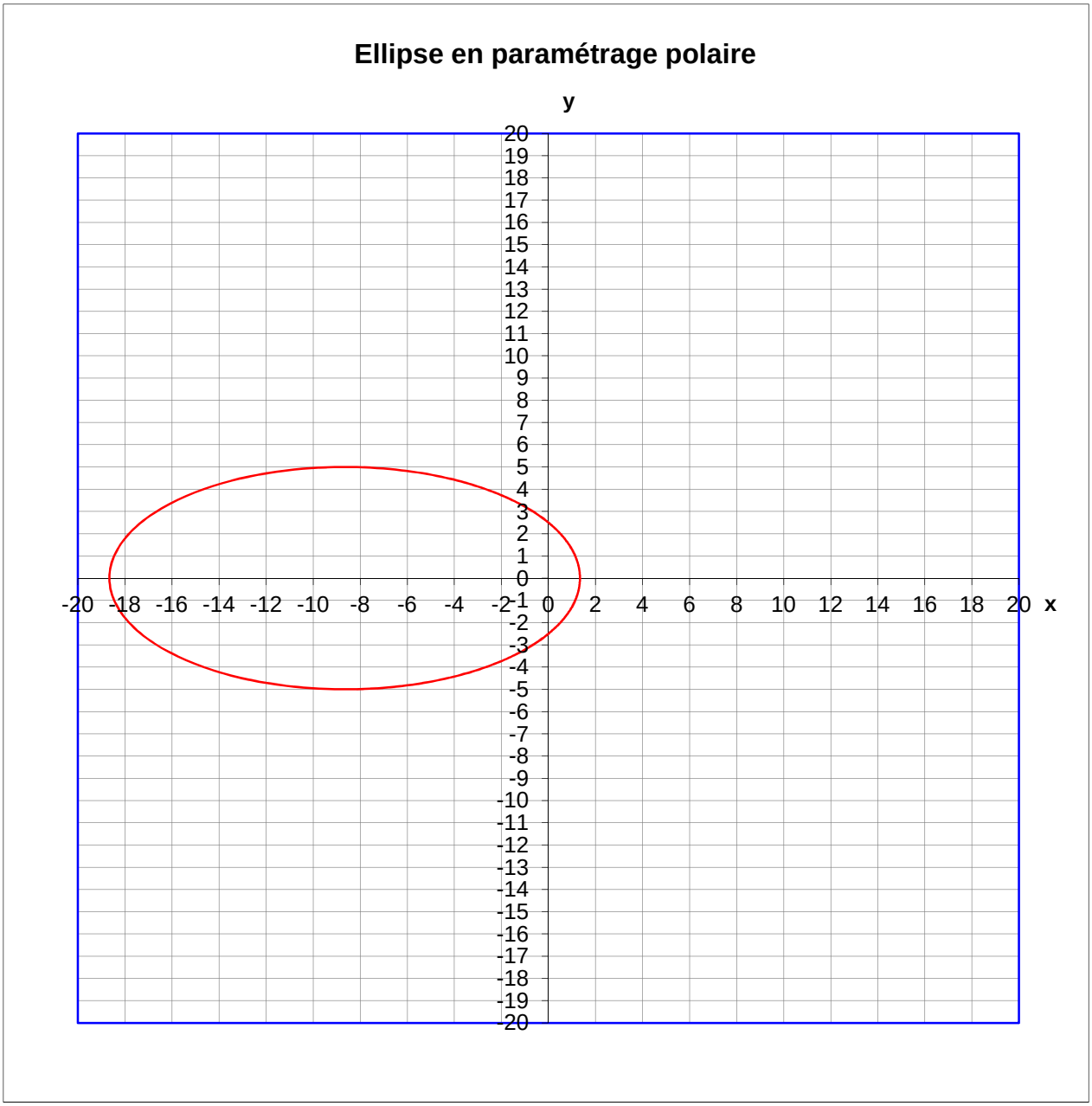


Figure 3 : *Ellipse paramétrée en polaire.*

■ **Activité 2 (facultative) :** La masse du Soleil et de la Terre

La 3ème loi de Kepler permet d'écrire immédiatement : $\boxed{\left(m_{\odot}+m_{T}\right)=\frac{4\,\pi^{2}}{G\cdot P^{2}}\cdot a^{3}}$.

A.N. : $\left(m_{\odot}+m_{T}\right)=\frac{4\,\pi^{2}}{6,67\cdot10^{-11}\ \text{m}^{3}\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{kg}^{-1}\times\left(365,24\times24\times3600\right)^{2}}\times\left(150\cdot10^{9}\ \text{m}\right)^{3}$

$\Rightarrow \quad \underline{m_{\odot}+m_{T}=2,01\cdot10^{30}\ \text{kg}}$

C'est essentiellement la valeur de la masse du Soleil.

■ **Activité 3 :** Trouver le demi-grand axe « a »

Étape 1 : Détermination approximative des paramètres de l'ellipse qui passe au plus près des positions mesurées.

On obtient, en utilisant Excel, la courbe suivante :

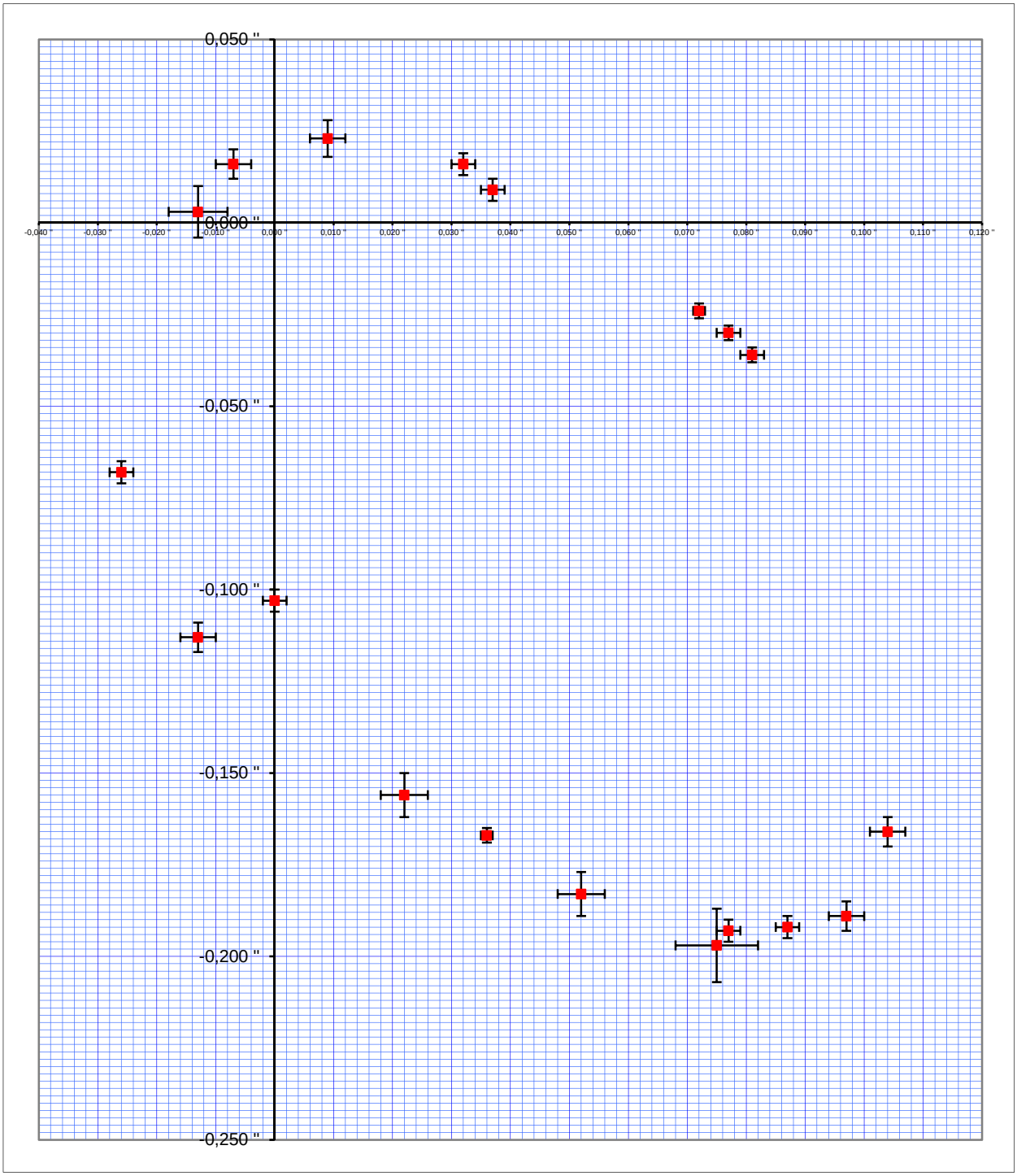


Figure 4 : *Points mesurés à l'aide du VLT*
Image : François Saint-Jalm (CEA)

On peut alors, avec un logiciel de dessin, tracer l'ellipse demandée « au jugé » :

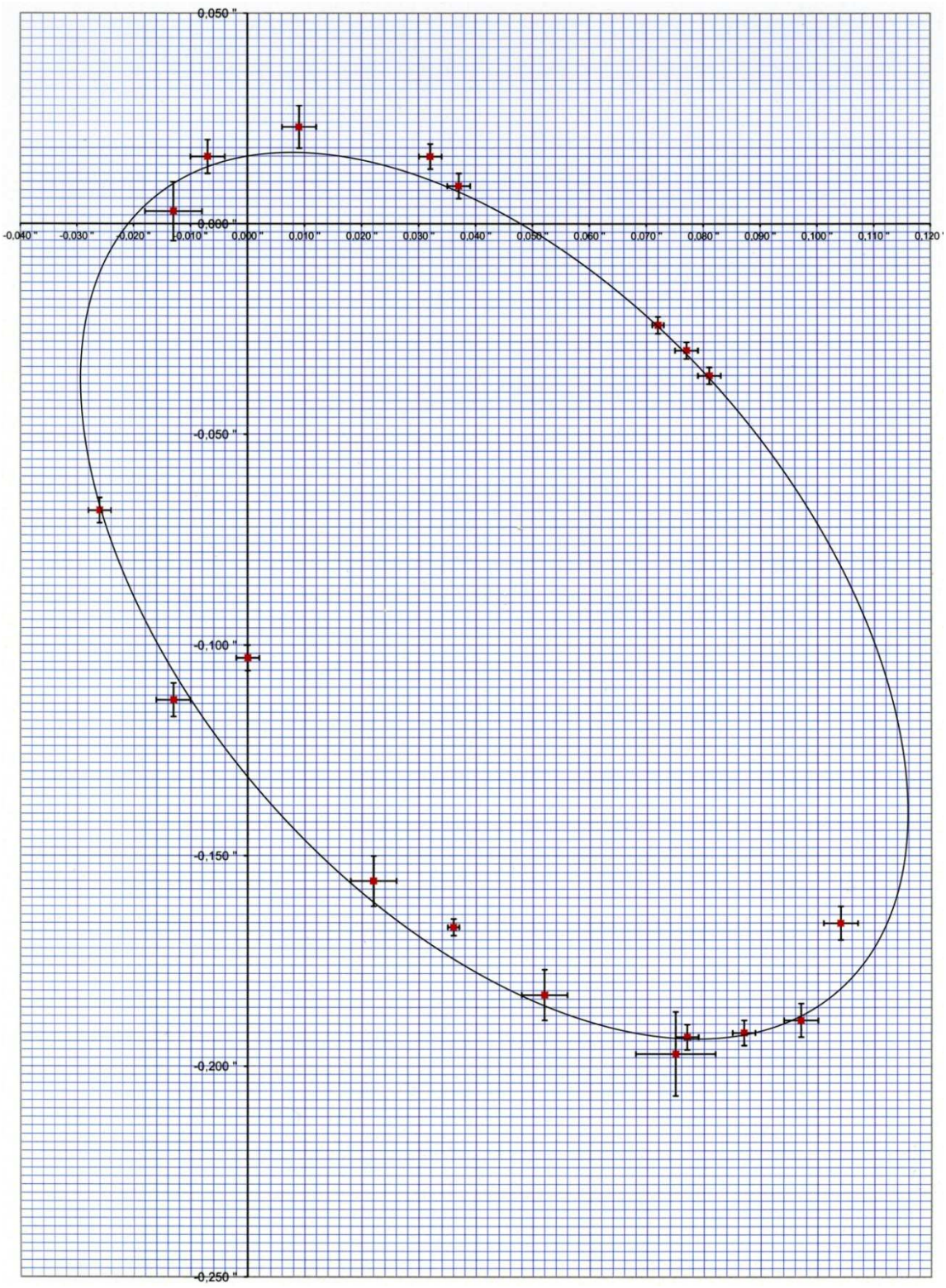


Figure 5 : *Tracé de l'ellipse*
Image François Saint-Jalm (CEA)

Traçons le grand axe AB, le demi-petit axe CD et déterminons les coordonnées de leurs extrémités :

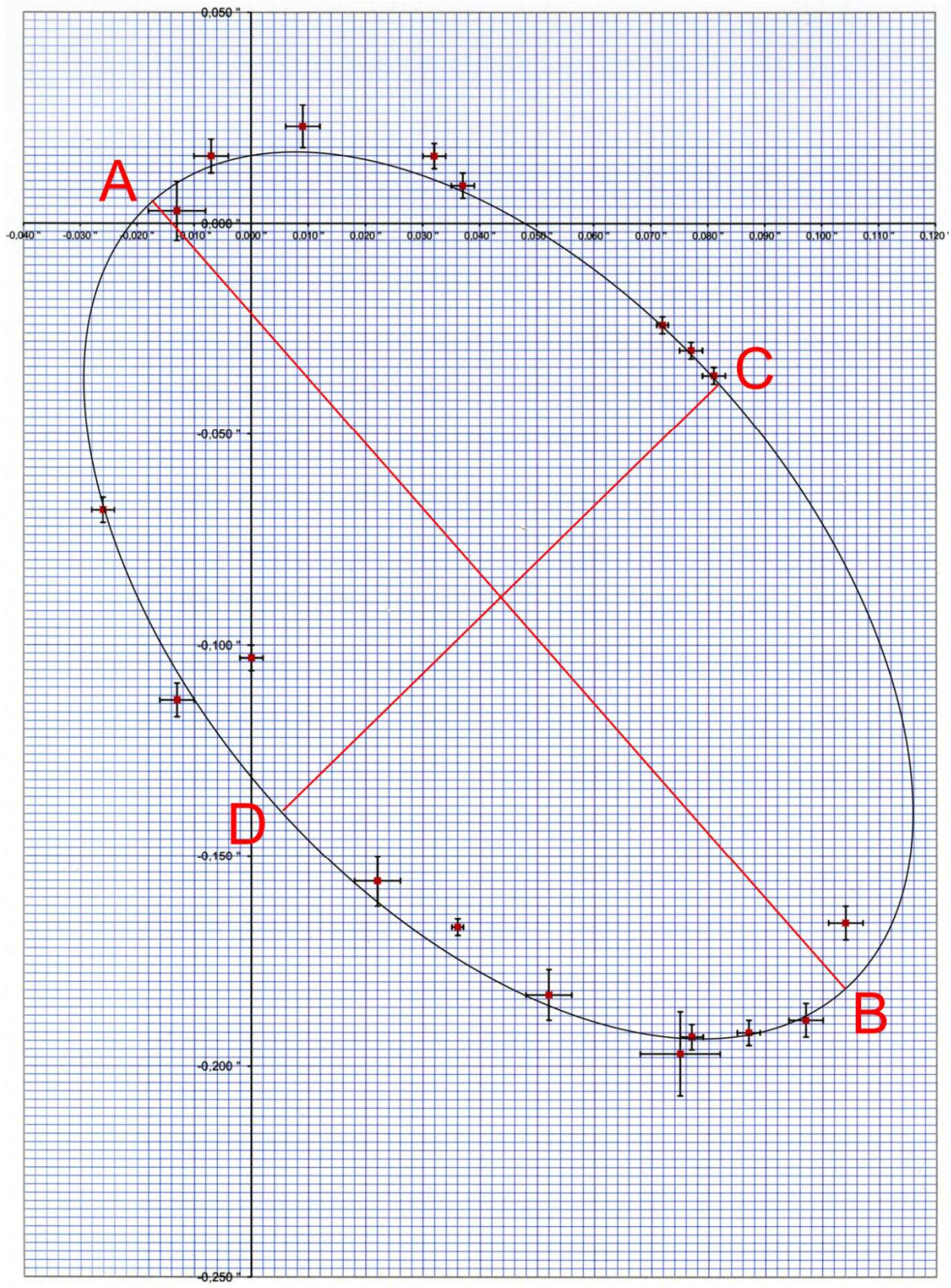


Figure 6 : *Tracé du demi-grand axe et du demi-petit axe de l'ellipse.*
Image François Saint-Jalm (CEA).

Avant toute mesure, on note que le tracé n'est pas parfait car le demi-grand axe ne passe pas par l'origine comme il le devrait. Ce n'est pas très important puisque cette ellipse sera affinée ensuite.

Pour AB, on trouve : $\begin{cases} x_A = -0,017'' \\ y_A = 0,005'' \end{cases}$ et $\begin{cases} x_B = 0,104'' \\ y_B = -0,182'' \end{cases}$.

Pour CD, on obtient : $\begin{cases} x_C = 0,082'' \\ y_C = -0,038'' \end{cases}$ et $\begin{cases} x_D = 0,0055'' \\ y_D = -0,140'' \end{cases}$

- Il est maintenant possible de calculer la longueur « a » du demi-grand axe par la formule : $a = \frac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}{2}$. Cela donne numériquement :

$$a = \frac{\sqrt{(0,104'' - (-0,017''))^2 + (-0,182 - 0,005)^2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{a = 0,1114''}.$$

- On procède de même pour le demi-petit axe : $b = \frac{\sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2}}{2}$. Numériquement on obtient : $b = \frac{\sqrt{(0,0055'' - 0,082'')^2 + (-0,140'' - (-0,038''))^2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{b = 0,06375''}$.

- Le calcul de l'angle φ s'effectue par : $\varphi = \arctan\left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right)$. La valeur numérique obtenue est :

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-0,182'' - 0,005''}{0,104'' - (-0,017'')}\right) \quad \Rightarrow \quad \underline{\varphi = -0,9965 \text{ rad}}.$$

Étape 2 : Ajustement précis de l'ellipse qui modélise le mieux l'orbite de S2.

L'usage du fichier « Trou noir galactique.xls » et de sa feuille de calcul « Ajustement de l'ellipse » conduit finalement aux valeurs suivantes :

- o $a = 0,1141''$
- o $b = 0,05805''$
- o $\varphi = -1,021$ rad

On en déduit la valeur du demi-grand axe en temps de lumière :

$$a = \frac{0,1141'' \times 91,7 \text{ j.l.}}{2''} \quad \Rightarrow \quad \underline{a = 5,23 \text{ j.l.}}$$

La valeur trouvée par Shödel et al (2003) est $\mathbf{a = 5,4 \pm 0,4}$ **jours – lumière**.

On en tire la valeur de « a » en mètres :

$$a = 5,23 \text{ j} \times 24 \text{ h.j}^{-1} \times 3600 \text{ s.h}^{-1} \times 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \underline{a = 1,356 \cdot 10^{14} \text{ m}}$$

■ **Activité 4 :** Trouver la période P

La méthode où l'on doit faire usage d'une balance de précision est vraisemblablement assez intéressante, à condition d'avoir tracé une ellipse appropriée. Il est recommandé d'employer du papier calibré un peu épais pour effectuer le tracé et les pesées.

La méthode du comptage de petits carrés est fastidieuse et peut devenir précise si l'on développe une stratégie appropriée permettant d'éviter les erreurs.

Cependant, à partir du moment où l'on a développé un fichier Excel autorisant un traitement numérique des données, il serait dommage de ne pas en tirer le profit maximum.

En observant la position des points de mesure par rapport à l'ellipse qui s'en approche le mieux, il semble judicieux de choisir les points B et S pour délimiter l'aire ΔA.

On obtient finalement : $\underline{P = 15{,}72 \text{ ans}}$.

La période de révolution de S2, obtenue par Schödel et al. (2003) est : $\mathbf{P = 15{,}7 \pm 0{,}7 \text{ ans}}$.

■ **Activité 5 :** Trouver la masse totale *m*

On a : $P^2 = \dfrac{4\,\pi^2}{G \cdot \left(m_{TN} + m_{É}\right)} \cdot a^3$. On peut en tirer : $\boxed{m_{TN} + m_{É} = \dfrac{4\,\pi^2}{G \cdot P^2} \cdot a^3}$. Pour l'application numérique, nous utiliserons, ici, les résultats obtenus dans les activités précédentes. IL faut, de plus, harmoniser les unités.

$\underline{\text{A.N.}}$: $m_{TN} + m_{É} = \dfrac{4\,\pi^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{m}^3 \cdot \text{s} \cdot \text{kg}^{-1} \times (15{,}72 \times 365{,}24 \times 24 \times 3600\ \text{s})^2} \times \left(1{,}3656 \cdot 10^{14}\ \text{m}\right)^3$

$\Rightarrow \quad \underline{m_{TN} + m_{É} = 6{,}125 \cdot 10^{36}\ \text{kg}}$

La valeur fournie par Schödel et al. (2003) est : $\underline{m_{TN} + m_{É} = 6{,}5 \cdot 10^{36}\ \text{kg} \pm 2{,}0 \cdot 10^{36}\ \text{kg}}$. Le résultat trouvé est donc très proche.

■ **Activité 6 :** Un trou noir ou beaucoup d'étoiles ?

La masse trouvée étant au moins un million de fois plus grande que celle du Soleil, il est clair que c'est la masse de l'objet central m_{TN}. Si l'on cherche quel nombre N_{sol} de soleils aurait la même masse, il suffit de calculer : $\boxed{N_{sol} = \dfrac{m_{TN}}{m_{\odot}}}$.

A.N. : EMBED Equation.DSMT4 .

Si $L_{\odot} = 4 \cdot 10^{26}$ W décrit bien la luminosité du Soleil, celle d'un objet composé de N_{sol} soleils serait (en l'absence d'effet d'écran) : $L_N = N_{sol} \times L_{\odot}$.

A.N. : EMBED Equation.DSMT4 .

La magnitude apparente qu'aurait le Soleil s'il était placé au centre de la Voie lactée est :

$$\boxed{m'_{\odot} = M + 5\log_{10}\left(\frac{D}{10\ pc}\right)}$$

A.N. : $m'_{\odot} = 4,83 + 5 \times \log_{10}\left(\frac{8 \cdot 10^3}{10}\right) \Rightarrow \underline{m'_{\odot} = 19,3}$.

Pour calculer la magnitude apparente de N_{sol} soleils, il faut faire un petit raisonnement en introduisant des notations adaptées.

On utilise un détecteur dont la réponse est $E_{\odot} = k \cdot L_{\odot}$, proportionnelle à la luminosité du Soleil. Cette réponse sera $E_N = k \cdot L_N$ pour N_{sol} soleils. La constante k dépend des caractéristiques du détecteur, de la distance de l'étoile et des différentes causes d'absorption qui peuvent exister entre l'étoile et l'observateur. Ici la distance est la même et on ne tient pas compte d'une éventuelle absorption, donc k est la même.

Notons m_N la magnitude apparente qu'auraient N_{sol} soleils placés au centre de la Voie lactée, on a, en tenant compte de la définition s'appuyant sur une étoile standard :

$$m_N = m_0 - 2,5\ \log_{10}\left(\frac{E_N}{E_0}\right)$$

Pour le Soleil, on a : $m'_{\odot} = m_0 - 2,5\log_{10}\left(\frac{E_{\odot}}{E_0}\right)$.

Donc, en effectuant la différence « membre à membre », on obtient : $m_N - m'_{\odot} = 2,5\log_{10}\left(\frac{E_{\odot}}{E_N}\right)$. En tenant compte des expressions de $E_{\odot}$ et de E_0, cela revient à : $m_N - m'_{\odot} = 2,5\log_{10}\left(\frac{L_{\odot}}{L_N}\right)$. Comme on a : $L_N = N_{sol} \times L_{\odot}$, il vient finalement : $\boxed{m_N = m'_{\odot} - 2,5\log_{10}(N_{sol})}$.

A.N. : $m_N = 19,3 - 2,5 \times \log_{10}\left(3,06 \cdot 10^6\right) \Rightarrow \underline{m_N = 3,09}$.

La magnitude apparente trouvée correspond à celle d'une étoile facilement observable à l'œil nu. Par exemple l'étoile δ Cassiopeiae (l'étoile double Ruchbah-Ksora) a une magnitude apparente égale à 2,7 quand celle de sa voisine sur la voûte céleste ε Cassiopeiae (l'étoile nommée Segin) vaut 3,4 (Voir Figure 9).

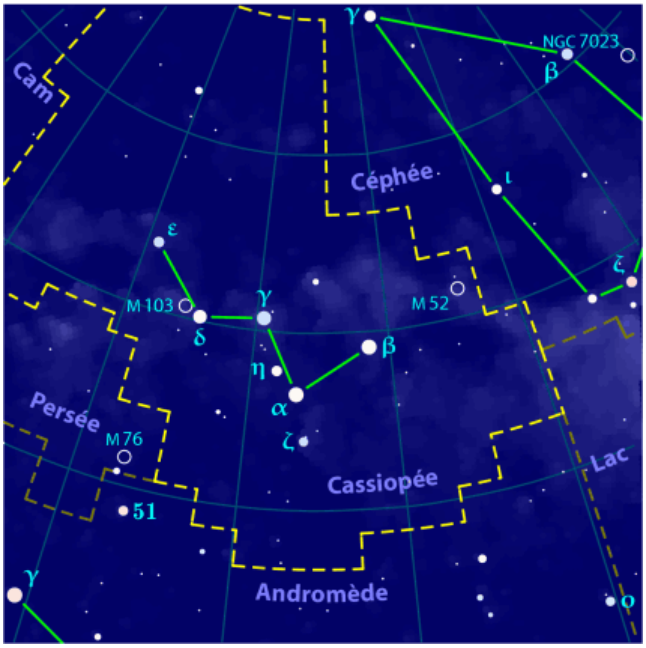


Figure 7 : *La constellation de Cassiopée.*
Image : Wikipédia.

■ **Activité 7 :** Propriété fondamentale des trous noirs

Il faut utiliser la formule donnée dans l'énoncé : $\boxed{v_{lib} = \sqrt{\dfrac{2\,G \cdot m_T}{r_T}}}$.

A.N. : $v_{lib} = \sqrt{\dfrac{2 \times 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ m^3 \cdot s^{-2} \cdot kg^{-1} \times 6 \cdot 10^{24}\ kg}{6378 \cdot 10^3\ m}} \quad \Rightarrow \quad \underline{v_{lib} = 11{,}2\ km \cdot s^{-1}}$.

On doit maintenant calculer le rayon r'_T que devrait avoir la Terre pour que, tout en conservant sa masse actuelle, sa vitesse de libération soit celle de la lumière. C'est donc : $\boxed{r'_T = \dfrac{2\,G \cdot m_T}{c^2}}$.

A.N. : $r'_T = \dfrac{2 \times 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ m^3 \cdot s^{-2} \cdot kg^{-1} \times 6 \cdot 10^{24}\ kg}{\left(3 \cdot 10^8\ m.s^{-1}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \underline{r'_T = 0{,}89\ cm}$.

Il faut finalement calculer ce que serait la vitesse de libération v'_{lib} de la Terre si son rayon gardait sa valeur actuelle et si sa masse était égale à celle de 2200 masses solaires. C'est $\boxed{v'_{lib} = \sqrt{\dfrac{4\,400\,G \cdot m_\odot}{r_{ter}}}}$.

A.N. : $v'_{lib} = \sqrt{\dfrac{4400 \times 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ m^3 \cdot s^{-2} \cdot kg^{-1} \times 2 \cdot 10^{30}\ kg}{6378 \cdot 10^3\ m}} \quad \Rightarrow \quad \underline{v'_{lib} = 3{,}03 \cdot 10^8\ m \cdot s^{-1}}$.

C'est un tout petit peu plus que la vitesse de la lumière.

■ **Activité 8 (facultative) :** Et si vous étiez un trou noir ?

On obtient : $r = \frac{2\,G \cdot m}{c^2}$. Pour une masse $m = 60\ \text{kg}$, le résultat est : $r = \mathbf{8{,}9 \cdot 10^{-26}\ m}$.

www.cea.fr

Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives
Direction de la Communication | Service Editions - Evènements
91191 Gif-sur-Yvette Cedex | T. +33 (0)1 64 50 16 09

Établissement public à caractère industriel et commercial | RCS Paris B 775 685 019